TD n°13: Révisions

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-4-5-6. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Exercices de révision.

Exercice 1. Représentations conformes.
On rappelle que $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ est une équivalence conforme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$.

1. La fonction log est inversible, d'inverse exp, de $\{\Re(z) > 0\}$ vers $\{-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$.
2. Il suffit de trouver une fonction harmonique sur $\{-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$ qui vaut -1 sur $\Im(z) = -\pi/2$ et 1 sur $\Im(z) = \pi/2$, on peut prendre $\frac{2}{\pi}\Im(z)$.
   On vérifie ensuite que exp envoie $\Im(z) = -\pi/2$ sur $D^- = \{\Re(z) = 0\} \cap \{\Im(z) < 0\}$ et $\Im(z) = \pi/2$ sur $D^+ = \{\Re(z) = 0\} \cap \{\Im(z) > 0\}$, et donc $\frac{2}{\pi}\Im(\log(z)) = \frac{2}{\pi}\arg(z)$ vaut 0 sur D^- et 1 sur D^+. Il suffit ensuite de vérifier que $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$, qui est une équivalence conforme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}$, préserve le signe de la partie imaginaire, et donc $\frac{2}{\pi}\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \frac{1}{2}$ définit une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ qui tend vers 1 sur la partie supérieure du cercle et vers -1 sur la partie inférieure.

Exercice 2. Fonctions harmoniques sur des anneaux.
Soit A l'anneau $r < |z| < R$, et u une fonction harmonique sur A. On va démontrer que u est de la forme $\Re f(z) + \alpha \log|z|$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $4\partial\overline{\partial} = \Delta$, donc $\overline{\partial}(2\partial u) = 0$.
2. Les fonctions holomorphes sur l'anneau A sont données par les séries de Laurent convergentes de la forme
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$
   Une telle série admet une primitive si et seulement si $a_{-1} = 0$, et on peut récupérer a_{-1} comme
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta} d\theta$$
   pour $r < \rho < R$.

3. On développe $g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta} = (\cos(\theta)\partial_x u + \sin(\theta)\partial_y u) + i(\sin(\theta)\partial_x u - \cos(\theta)\partial_y u)$.
   On reconnaît alors que $\Im(\rho g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}) = -\frac{d}{d\theta}(u(\rho e^{i\theta}))$, et donc
$$\begin{aligned}\Im\left(\int_0^{2\pi} g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right) &= \int_0^{2\pi} \Im\left(g(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}\right)d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}u(\rho e^{i\theta})d\theta \\ &= -u(\rho e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$
   Ainsi, on a bien $\Im(\alpha) = 0$.
   Alternativement, on peut écrire $du = \partial u dz + \overline{\partial} u d\overline{z}$, c'est une 1-forme sur A. En notant $i : S \to A$ l'injection du cercle S de rayon ρ dans A, on a $i^*du = d(i^*u)$ (la restriction de du à S est la dérivée extérieure de la restriction de u à S). La formule de Stokes donne alors $\int_S i^*du = 0$, et donc
$$\int_S \partial u dz = -\int_S \overline{\partial} u d\overline{z}.$$
   Comme u est à valeurs réelles, $\overline{\partial} u d\overline{z} = \overline{\partial u dz}$, et on en déduit que $2i\pi\alpha = \int_S \partial u dz$ est égal à l'inverse de son conjugué, et est donc un nombre imaginaire pur, donc α est réel.

---

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

4. Considérons $v = \Re(f) + \alpha \log |z|$, et démontrons qu'elle est constante. Pour ce faire, on écrit localement $\log |z| = \Re(\log(z))$, et donc localement $v = \Re(f + \alpha \log(z))$. On va montrer que $\partial_x v = \partial_x u$ et $\partial_y v = \partial_y u$, ce qui montrera que $u = v$. Pour ce faire, on peut procéder de bien des manières. Par exemple, on peut se rappeler que pour h holomorphe, on a $\partial_x h = h'$ et $\partial_y h = ih'$. On calcule alors
$$\partial_x v = \Re(\partial_x f + \alpha \partial_x \log(z)) = \Re(g - \alpha/z + \alpha/z) = \Re(g) = \partial_x u$$
et
$$\partial_y v = \Re(\partial_y f + \alpha \partial_y \log(z)) = \Re(ig - i\alpha/z + i\alpha/z) = -\Im(g) = \partial_y u.$$
Ainsi, u et v diffèrent d'une constante.

Exercice 3. Fonctions sans points fixes.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière telle que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

1. On remarque tout d'abord que f ne peut pas avoir de point fixe. Ainsi, $\frac{f(f(z))-z}{f(z)-z}$ est bien une fonction entière, et elle évite la valeur 0 car $f(f(z)) \neq z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. De même, elle évite la valeur 1, car si $f(f(z)) - z = f(z) - z$ alors $f(f(z)) = f(z)$ et en appliquant encore f on a $f(f(w)) = f(w) = w$ pour $w = f(z)$. Ainsi, $f(f(z)) - z = a(f(z) - z)$ pour un $a \neq 0, 1$.

2. On dérive l'égalité ci-dessus, pour l'égalité
$$f'(f(z))f'(z) - 1 = af'(z) - a.$$
Si $f'(z) = 0$, on trouve $1 = a$, ce qui n'est pas possible. On peut donc diviser, et on obtient :
$$f'(f(z)) = a + \frac{1-a}{f'(z)}$$
Comme $\frac{1-a}{f'(z)} \neq 0$, $f'(f(z))$ ne prend jamais la valeur a.

3. Comme $f'(f(z))$ ne s'annule pas et n'atteint pas la valeur a, elle est constante par le théorème de Picard. Ainsi, f' est constante sur l'image de f, qui est par le théorème de Picard $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$, et donc f' est constante. Il s'ensuit que $f(z) = pz + q$, et donc $f(f(z)) = p^2 z + pq + q$. Si $p^2 \neq 1$, $p^2 z + pq + q = z$ admet une solution, donc $p^2 = 1$. Si $p = -1$, on a $f(f(z)) = z$ qui n'a que des points fixes, et donc $p = 1$ et f est une translation.

Exercice 4. Une famille normale.
Soit $p > 0$, on note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ vérifiant $|f|_{L^p} \leqslant 1$.

1. On utilise la formule de Cauchy
$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{z - \rho e^{i\theta}} \rho e^{i\theta} d\theta.$$
On prend les valeurs absolues, et on trouve
$$|f(z)| \leqslant \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|z - \rho e^{i\theta}|} d\theta \leqslant \frac{\rho}{2\pi(\rho - |z|)} \int_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{i\theta})\right| d\theta.$$
Comme $t \mapsto t^p$ est convexe et que $\frac{d\theta}{2\pi}$ a une masse totale de 1 sur $[0, 2\pi]$, on peut appliquer l'inégalité de Jensen et on a
$$|f(z)|^p \leqslant \frac{\rho^p}{2\pi(\rho - |z|)^p} \int_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{i\theta})\right|^p d\theta.$$
Comme $p \geqslant 1$ et $\rho < 1$, on a $\rho^p < \rho$. En vérifiant que $|z| \leqslant r$, on obtient finalement l'inégalité voulue, à savoir
$$|f(z)|^p \leqslant \frac{\rho}{2\pi(\rho - r)^p} \int_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{i\theta})\right|^p d\theta.$$

2. Pour $\rho \geqslant r+\varepsilon$, on a $\frac{1}{(\rho-r)^p} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}$ et donc

$$|f(z)|^p \leqslant \frac{\rho}{2\pi\varepsilon^p}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^p d\theta.$$

En intégrant de $r+\varepsilon$ à 1, on obtient

$$(1-r-\varepsilon)|f(z)|^p \leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon^p}\int_{r+\varepsilon}^1\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^p d\theta\rho d\rho = \frac{1}{2\pi\varepsilon^p}\int_{|w|\geqslant r+\varepsilon}|f(w)|d\lambda(w).$$

3. Comme $\int_{|w|\geqslant r+\varepsilon}|f(w)|d\lambda(w) \leqslant 1$, on a

$$\sup_{|z|\leqslant r}|f(z)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{1/p}(1-r-\varepsilon)^{1/p}\varepsilon}$$

ce qui prouve que $\mathcal{F}_p$ est uniformément bornée sur $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$, et donc sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Exercice 5. Obstructions et reformulations.
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $S \subseteq U$ un ensemble fini, $V = U \setminus S$.

1. On considère

$$0 \to \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C}^S \to 0.$$

Une suite exacte est une suite pour laquelle l'image d'une flèche est le noyau de la suivante. La première flèche est l'injection des fonctions constantes dans $\mathcal{O}(V)$. L'exactitude en le premier $\mathcal{O}(V)$ revient à dire que les fonctions constantes (image de $\mathbb{C}$) sont exactement celles de dérivée nulle (noyau de d/dz), ce qui est vrai car V est connexe.
Pour l'exactitude en $\mathbb{C}^S$, c'est la surjectivité de Res qu'il faut démontrer : pour avoir $\mathrm{Res}(f) = (\beta_a)_{a\in S}$, il suffit de prendre $f = \sum_{a\in S}\frac{\beta_a}{(z-a)}$.
Reste à voir l'exactitude au deuxième $\mathcal{O}(V)$: elle revient à dire que les fonctions dans l'image de d/dz, c'est-à-dire celles admettant une primitive, sont exactement celles qui n'ont pas de résidu. Les fonctions admettant une primitive n'ont clairement pas de résidus. Dans l'autre sens, si une fonction n'a pas de résidus, on peut (grâce à la caractérisation des fonctions holomorphes sur un disque épointé) l'écrire comme $f(z) = g(z) + \sum_{a\in S}\frac{1}{(z-a)^2}h_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$, où g est une fonction holomorphe sur U et h_a est une fonction entière. Comme U est simplement connexe, g admet une primitive, et si H_a est une primitive de h_a, alors $-H_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ est une primitive de $\frac{1}{(z-a)^2}h_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$. Ainsi, f admet bien une primitive.

2. On considère

$$0 \to 2i\pi\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}(V)^\times \xrightarrow{\mathrm{Res}\circ\mathrm{dlog}} \mathbb{Z}^S \to 0.$$

L'exactitude en $2i\pi\mathbb{Z}$ et $\mathcal{O}(V)$ est évidente, voyons l'exactitude en $\mathbb{Z}^S$: elle revient à dire que pour $\boldsymbol{n} = (n_a)_{a\in S}$, il existe une fonction $f_{\boldsymbol{n}}$ telle que $\mathrm{Res}_a(\mathrm{dlog}(f_{\boldsymbol{n}})) = n_a$. On peut pour $f_{\boldsymbol{n}}$ prendre $\prod_{a\in S}(z-a)^{n_a}$, et on a bien la surjectivité de Res $\circ$ dlog.
Reste l'exactitude en $\mathcal{O}(V)^\times$, qui se traduit comme : "une fonction holomorphe inversible est une exponentielle si et seulement si sa dérivée logarithmique n'a pas de résidus". Dans le sens direct, c'est facile : si $f = e^h$, alors $d\log(f) = h'$, qui n'a pas de résidus car c'est une dérivée. Réciproquement, si $\mathrm{dlog}(f) = f'/f$ n'a pas de résidus, elle admet une primitive h, et on peut vérifier que fe^{-h} est constante, donc f est bien dans l'image de exp.

Remarque. En toute généralité, sans supposition quelconque sur l'ouvert connexe $V \subseteq \mathbb{C}$, on a des suites exactes

$$0 \to H^0(V,\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(V) \to H^1(V,\mathbb{C}) \to 0$$

et

$$0 \to H^0(V,\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}(V)^\times \to H^1(V,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Dans notre cas, on peut voir $H^1(V,R)$ comme $\mathrm{Hom}_R(H_1(V,R),R)$, et selon cette vision, on peut voir une fonction holomorphe f comme une forme linéaire sur $H_1(V,\mathbb{C})$ sur les générateurs par $[\sigma] \mapsto \int_\sigma f(z)dz$ (en

prenant un représentant suffisamment lisse de σ, qui existe toujours). Cette définition est valide car l'intégrale de f sur un cycle homologue à 0 sera nulle (c'est essentiellement la formule de Stokes : un cycle homologue à 0 est un bord !)
Dans la même veine, on peut montrer que $\int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \in 2i\pi\mathbb{Z}$, et la dernière flèche dans la deuxième suite exacte est donnée par

$$f \mapsto \left(\sigma \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z)}dz\right).$$

Exercice 6. Théorème de Von Dantzig.

1. Rappelons les identités importantes $\cosh(iu) = \cos u$ et $\sinh(iu) = i\sin u$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on considère la fonction méromorphe

$$f(z) = e^{-2i\pi z\xi}\frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi z) + \cos(\pi a)},$$

que l'on va intégrer sur le contour rectangulaire γ_R de sommets R, $R+2i$, $-R+2i$, $-R$ où $R > 0$ est un réel que l'on fera tendre vers l'infini. Les pôles de f sont les solutions de l'équation

$$\cosh(\pi z) + \cos(\pi a) = 0 \iff e^{2\pi z} + 2e^{\pi z}\cos(\pi a) + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $-4\sin^2(\pi a)$, et on trouve donc

$$e^z = -\cos(pia) \pm i\sin(\pi a)$$

donc $z = i\pi(1 \pm a) + 2ni\pi$ Les pôles sont tous simples, et les deux seuls à avoir une partie imaginaire entre 0 et 2 sont $\alpha = i(1-a)$ et $\beta = i(1+a)$ et le théorème des résidus nous donne

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,\alpha) + \mathrm{Res}(f,\beta)).$$

Calculons les résidus, on trouve

$$\mathrm{Res}_\alpha(f) = \frac{e^{-2i\pi\alpha x}\sin(\pi a)}{\pi\sinh(\pi\alpha)} = \frac{e^{2\pi(1-a)x}\sin(\pi a)}{i\pi\sin(\pi - \pi a)} = \frac{e^{2\pi(1-a)x}}{i\pi}.$$

et de même, $\mathrm{Res}_\beta(f) = -\frac{e^{2\pi(1+a)x}}{i\pi}$. Ainsi on trouve

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = -4e^{2\pi x}\sinh(2\pi a x).$$

On décompose maintenant l'intégrale suivant les quatre intégrales sur les segments

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_0^2 f(R+iu)idu + \int_R^{-R} f(t+2i)dt + \int_2^0 f(-R+iu)idu,$$

puis on fait tendre $R \to \infty$ pour obtenir que les intégrales sur les segments verticaux tendent vers 0 : en effet, par exemple pour la première, en minorant $|\cosh(\pi(R+iu))|$ via $|\cosh(x+iy)|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$, on a pour R assez grand

$$|f(R+iu)| \leqslant \frac{e^{2\pi u|x|}}{\sinh(\pi R) - 1},$$

et

$$\left|\int_0^2 f(R+iu)idu\right| \leqslant 2\sup_{0\leqslant u\leqslant 2}|f(R+iu)| \leqslant \frac{2e^{4\pi|x|}}{\sinh(\pi R) - 1}.$$

On regroupe les deux intégrales restantes en observant que

$$f(z+2i) = e^{-2i\pi z\xi}e^{4\pi\xi}\frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi z) + \cos(\pi a)} = e^{4\pi\xi}f(z),$$

ce qui donne, en notant $I(\xi)$ l'intégrale à calculer, que

$$(1 - e^{4\pi\xi})I(x) = -4e^{2\pi\xi}\sinh(2\pi a\xi),$$

ce qui conclut.

2. C'est une application directe de la formule précédente au cas où $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Produits de Blaschke

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité. Pour $a \in \mathbb{D}$, on définit le *facteur de Blaschke* $\varphi_a \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

1. On a
$$|z| = 1 \implies |1-\bar{a}z| = |z(1-\bar{z}a)| = |z-a| \implies |\varphi_a(z)| = 1.$$
Par le principe du maximum on en déduit que $|\varphi_a(z)| < 1$ dès que $z \in \mathbb{D}$.
Pour voir que φ_{-a} est l'inverse de φ_a, il suffit d'utiliser la formule d'inversion pour les homographies : l'inverse de φ_a est
$$z \mapsto \frac{z+a}{1+\bar{a}z} = \varphi_{-a}(z).$$

2. (a) Soient $a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$ tels que $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \varphi(z) = w\}$. Soit $B = \prod_{i=0}^n \varphi_{z_i}$ le produit fini de Blaschke associé à $\{z_0, \dots, z_n\}$. La fonction $\psi = \varphi_w \circ \varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{D}$ et s'annule précisément en les z_i. Donc $\psi = B_n g$ avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$.

   (b) On sait que $|B_n(z)| \to 1$ uniformément quand $|z| \to 1$. Ainsi, comme $|\psi(z)| \leqslant 1$ pour tout z, on a
$$\sup_{|z|=r} |g(z)| \leq \inf_{|z|=r} |1/B_n(z)| \xrightarrow{r\to 1} 1$$
et donc par principe du maximum, $|g(0)| \leqslant \inf_r \sup_{|z|=r} |g(z)| \leqslant 1$.

   (c) On a
$$|w| = |\psi(0)| = |B(0)g(0)| \leqslant |B(0)|\,.$$
Finalement, en prenant l'inverse et en appliquant log on obtient à la limite
$$\sum_{\varphi(z)=w} \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \leqslant \log(1/\,|w|).$$

3. Comme f est bornée, on peut supposer que $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| < 1$ et $w := f(0) \neq 0$. Soit $\varphi = \varphi_w \circ f$ qui vérifie $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ et $\varphi(0) = 0$. Il est clair que, avec multiplicités
$$f(z) = 0 \iff \varphi(z) = -w.$$
D'après la question précédente on a $\sum_{j=1}^\infty \log\left(\frac{1}{|a_j|}\right) \leqslant \log(1/\,|w|) < \infty$ et la série de terme général $\log\left(\frac{1}{|z_j|}\right)$ converge. Comme $|a_i| \xrightarrow{i\to\infty} 1$, par le principe des zéros isolés, on a $\log\left(\frac{1}{|z_i|}\right) \sim 1 - |a_i|$ et donc finalement la série de terme général $1 - |a_i|$ converge.

4. Posons
$$b_n(z) := 1 + g_n(z) := \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z}.$$
Donc
$$g_n(z) = \frac{(|a_n|^2 - |a_n|)z + a_n(|a_n| - 1)}{a_n(1 - \overline{a}_n z)} = (|a_n| - 1)\frac{|a_n|\,z + a_n}{1 - \overline{a}_n z},$$
d'où
$$|g_n(z)| \leqslant \frac{(1+|z|)(1-|a_n|)}{|1 - \overline{a}_n z|} \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-|a_n|).$$
Ceci montre que la série des $g_n(z)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{D}$. Etant donné un compact K de $\mathbb{D}$, $g_n|_K$ sera suffisamment petite pour n assez grand (disons $n > N_K$) pour que $\log(b_n) = \log(1+g_n)$ existe. On aura alors
$$\prod_{n\geqslant 1} b_n(z) = \prod_{n=1}^{N_K} b_n(z) \cdot \exp\left(\sum_{n>N_K} \log(1+g_n)\right).$$
Comme la série des g_n converge normalement sur K, la série des $\log(1+g_n)$ converge uniformément (même normalement aussi) sur K, ce qui garantit la convergence uniforme du produit infini.

5. Commençons par montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathbb{D}$ telle que $\sum_{n\geqslant 1}(1-|a_n|) < \infty$ et dont l'ensemble des points d'accumulation est exactement K. Comme X est un espace métrique compact il est séparable et donc il existe une suite $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ de K dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est exactement K. Posons alors $a_n = (1-n^{-2})u_n$ pour tout n. La suite a bien les propriétés voulues puisque $1-|a_n| = n^{-2}$ et $a_n - u_n \to 0$. On note A l'image de la suite et $A' = \{1/\overline{a}_n : n \geqslant 1\}$.
On va démontrer qu'on peut en fait étendre le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n}\varphi_{a_n}$$

à $\mathbb{C} \setminus (K \cup A')$.
Soit $X \subset \mathbb{C} \setminus (K \cup A')$ un compact. Justifions qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|1-\overline{a}_n z| \geqslant \delta$ pour tout $z \in K$ et n entier. Supposons le contraire, alors il existe une suite $(w_n)_n$ d'éléments de X et une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments de A (ce n'est pas forcément une sous-suite de $(a_n)_n$) telles que $1-\overline{\alpha}_n w_n \to 0$. Quitte à extraire une sous-suite convergente de ces suites on peut supposer que $\alpha_n \to \alpha \in K \cup A$ et $w_n \to w \in K \cup A$. On en déduit que $1-\overline{\alpha}w = 0$, donc $w = \frac{\alpha}{|\alpha|^2}$. Si $\alpha \in K$, on a $|\alpha|^2 = 1$, et donc on a une contradiction car $X \cap K = \emptyset$. Sinon, $\alpha \in A$, et donc $\frac{\alpha}{|\alpha|^2}$ est dans A', ce qui donne encore une contradiction car $X \cap A' = \emptyset$.

On est enfin en mesure de construire la fonction voulue, qui sera le produit de Blaschke B associé aux a_n. Soit $X \subset \mathbb{C} \setminus (K \cup A')$ un compact. Posons $M = \sup_{z\in K}|z| < \infty$ et $\delta = \inf_{n\geqslant 1}|1-\overline{a}_n z| > 0$. Rappelons qu'on a établi la majoration

$$|g_n(z)| \leqslant \frac{(1+|z|)(1-|a_n|)}{|1-\overline{a}_n z|}, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

ce qui donne

$$\sup_{z\in K}|g_n(z)| \leqslant \frac{(1+M)(1-|\overline{a}_n|)}{\delta}.$$

Ainsi $\sum_n g_n$ converge normalement sur K, donc le produit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$ converge uniformément sur K et y définit un prolongement holomorphe de B. Le produit de Blaschke se prolonge donc à $\mathbb{C}\setminus(K \cup A')$, et donc au voisinage de tout point de $\mathbb{T} \setminus K$. Si B admet un prolongement analytique f au voisinage de $w \in K$, les zéros de f, qui sont exactement les a_n, s'accumulent en w et par prolongement analytique, f est identiquement nulle mais c'est absurde puisque le produit B n'est pas nul sur $\mathbb{D}$ par la question précédente.